Stochastic CalculusのNevanlinna理論への応用 (多変数函数論にあらわれる解析と幾何)

厚地, 淳

数理解析研究所講究録
1058巻 1998年 12-21

Stochastic Calculus の Nevanlinna 理論への応用

厚地 淳 (Atsushi Atsuji)
大阪大学 理学研究科

1 古典的 Nevanlinna 理論と Brown 運動

本稿では、確率論的手法を用いた Nevanlinna 理論への応用の試みの幾つかの例を述べたい。

まず、古典的な Navanlinna 理論と Brown 運動との関係について見てみよう。記号の説明からはじめる。

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を filtered probability space とする。P は、Ω 上の確率測度であり、$\mathcal{F}$ はその定義域、$\mathcal{F}_t$ は $t\uparrow$ のとき増大する σ−field である。$\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty$ である。Ω 上の $\mathcal{F}$−可測な関数の積分 $\int_\Omega f(\omega)dP(\omega)$ を 期待値の記号を使って、$E[f]$ と書く。

今、$\mathbf{C}$ 上の Brown 運動を考える。

$$\Omega = C([0,\infty)\to\mathbf{C}), \quad Z_t(\omega)=\omega(t) \quad \omega\in\Omega$$

とし、$\mathcal{F}_t=\sigma(Z_s; 0\le s\le t)$ とする。P は、$\{P_x, x\in\mathbf{C}\}$ という確率測度の族が考えられ、

$$P_x(Z_0=x)=1, \qquad P_x(Z_t\in A)=\int_A \frac{1}{2\pi t}e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}dy.$$

ただし、A は $\mathbf{R}^2$ の Borel 集合である。$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Z_t, \{P_x\})$ を Brown 運動という。簡単のため、屡これを Z_t や、(Z_t, P_x) で代表させる。P_x の下で考える Z_t のことを x から出発する Brown 運動という。Brown 運動はより一般な空間でも考えられ、特に、Riemann 多様体上では、Brown 運動を X_t と書くと、分布は $P_x(X_t\in A)=\int_A p(t,x,y)dv(y)$ で与えられる。ただし、$p(t,x,y)$ は $\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta$ の基本解、$dv(y)$ は Riemannian volume から決まる測度である。

Brown 運動を用いて、有理形関数の値分布を考えるとき、次の Levy の等角普遍性と呼ばれる性質が基本的であり、それらの関係の深さを物語っている。

命題 1 f を $U\subset\mathbf{C}$ 上の正則関数、$Z_0=z_o$ とすると、

$$f(Z_t)=\tilde{Z}_{\phi_t}, \quad \phi_t=\int_0^t |f'(Z_s)|^2 ds \quad \textit{for}\ 0\le t<\tau_U$$

ここで、$\tilde{Z}_t$ は 複素 *Brown* 運動で $f(z_o)$ から出発するもの、$\tau_U=\inf\{t>0: Z_t\notin U\}$ である。

つまり、複素平面上の Brown 運動を正則関数で写したものは、再び Brown 運動を時間変更したものになるということである。この性質と、**C** 上の Brown 運動の再帰性を用いて、B.Davis は、Picard の定理の確率論的証明を与えた。([5])

では、Brown 運動と Nevanlinna 理論との関係を見てみる。f が **C** 上の有理形関数の時にこれをみてみよう。u_a を

$$u_a(x) = \log \|x, a\|^{-1},$$

とおく。ここで、

$$\|x, a\| = \begin{cases} \frac{|x-a|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|a|^2}} & \text{if} \quad a < \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} & \text{if} \quad a = \infty \end{cases}$$

Nevanlinna 理論に出てくる proximity function, counting function, (Ahlfors-Shimizu の) characteristic function は、

$$\begin{aligned} m(a,r) &= \int_0^{2\pi} u_a \circ f(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \\ N(a,r) &= \sum_{f(\zeta)=a, \zeta \in B(r)} \log \frac{r}{|\zeta|} \quad (\text{ the sum counting with multiplicity}) \\ T(r) &= \int_{B(r)} \frac{|f'(z)|^2}{(|f(z)|^2+1)^2} g_r(0,z) dxdy \end{aligned}$$

であった。 ここで、$B(r) = \{|z| < r\}$, $g_r(w,z)$ は $B(r)$ 上の $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{R}^2}$ の 通常の Green 関数である。これらは、

$$\begin{aligned} T(r) &= E[\int_0^{\tau_r} \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}(Z_s)ds] \\ m(a,r) &= E[u_a \circ f(Z_{\tau_r})] \end{aligned}$$

と書ける。ここで、$\tau_r = \inf\{t > 0 : Z_t \notin B(r)\}$. 更に、$u_a \circ f$ に Ito の公式を使えば、第一主定理

$$m(a,r) + N(a,r) = T(r) + O(1)$$

がわかる。この時、$u_a \circ f(Z_t)$ は local submartingale であり、これを V_t とおけば、

$$N(a,r) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda P(V^*_{\tau_r} > \lambda)$$

とも書ける。ここで、$V^*_T = \sup\{V_t : 0 \le t \le T\}$ である。ここで重要なのは、第一主定理を示す際、 **C** や、Z_t の特殊性を何も使っていないことである。

実は、Nevanlinna theory と Brown 運動の対応をまとめると、次表の様になることがわかる。

Nevanlinna Theory	*Stochastics*
characteristic function $T_f(r)$	the first exit time from $f(\{\lvert z\rvert < r\})$ (1-dimensional case) intrinsic time (higher dimensional case)
counting function $N_f(r,a)$	$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(V_T^* > \lambda)$:tail probability of maximal process of local submartingale
First Main Theorem	Doob-Meyer decomposition in martingale context (Dynkin's formula or Ito's formula in Markov process or Brownian motion context)
Lemma on Logarithmic Derivative and Second Main Theorem	Inequalities for increasing processes

表を見てもわかるように、Brown 運動より一般の性質が対応していることがわかる。我々は、後の節で見るように、holomorphic martingale が存在する 複素空間から、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への正則写像については第一主定理を常に示すことができ、target がより一般の多様体でも類似のものが成り立つことがわかる。(上の u_a のような singular set を除いて多重劣調和な関数が存在することが必要である。)

また、$T(r)$ 自身も確率論的意味を持つ。f を $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ への正則写像とみれば、局所的に、

$$f(Z_t) = W_{\psi_t} \quad \psi_t = \int_0^t \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}(Z_s)ds$$

と書ける。ここで、W_t は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ 上の Fubini-Study 計量に対応する Brown 運動である。即ち、$T(r) = E[\psi_{\tau_r}]$ である。また、ψ_t は、$f(Z_t)$ を holomorphic martingale と見た時の intrinsic time になっている。

我々は、まず、この観察に基づき、第一主定理を一般化し、その直接の結果としての Casorati-Weierstrass の定理の拡張を行う。

Nevanlinna 理論では、第二主要定理が中心的役割を果たすが、この証明で重要なのが、次の対数微分の補題と呼ばれるものである。

対数微分の補題.

f を $\mathbf{C}$ 上の有理形関数とする。長さ有限のある除外集合に含まれない r に対して、

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|f'(re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|}\frac{d\theta}{2\pi} \le O(\log T(r) + \log r)$$

が成立する。

この補題に関しては、昔から種々の証明が与えられてきた。筆者は、以前、Brown 運動の等角不変性と複素 Brown 運動の加法的汎関数に関する不等式を証明する事で確率論的証明を与えた。([1])

最近、Rudin は、これを劣調和関数の場合に拡張したものを示した。しかし、正則写像の値分布論に応用するには不十分であろう。我々は、これを δ−subharmonic function に拡張したものを 確率論的手法を用いて示す。

2 正則マルチンゲール

まず、正則マルチンゲールを導入する。

定義 1 ([8],[7]) 複素多様体 N 上の確率過程 Y が、正則マルチンゲールとは、任意の開集合 $U \subset N$, その上の任意の正則関数 h と、$Y_{(S+t)\wedge T} \in U \quad \forall t$ をみたす任意の *stopping time* $S < T$ に対して、$Re\ h(Y_{(S+t)\wedge T})$ が、実数値局所マルチンゲールとなることである。また、複素多様体 N 上の拡散過程 (Y, P_x) が、正則マルチンゲールのとき、これを正則拡散過程と呼ぶ。

正則拡散過程の最も基本的な例は、ケーラー多様体上の Brown 運動である。

次の性質は基本的である。

命題 2 i) u が N 上の 多重劣調和関数、Y が N 上の正則マルチンゲールで $u(Y_0) < \infty$ ならば、$u(Y)$ は、局所劣マルチンゲール。また、u が多重調和関数ならば、$u(Y)$ は 局所マルチンゲールである。
ii) $f : M \to N$ が正則写像、Y が M 上の正則マルチンゲールならば、$f(Y)$ は N 上の正則マルチンゲールである。

定義 2 Y を ケーラー多様体 N 上の正則マルチンゲール、$\{g_{\alpha,\overline{\beta}}\}$ をケーラー計量とするとき、Y の固有時間 *(intrinsic time)* $[Y, \overline{Y}]$ を

$$d[Y, \overline{Y}]_t = g_{\alpha,\overline{\beta}}(Y) d < Y_\alpha, \overline{Y_\beta} >_t$$

で定義する。ここで、$< Y_\alpha, \overline{Y_\beta} >_t$ は 普通の $\mathbf{C}-$ 値マルチンゲールに関する *quadratic variation process (cf. [11])* である。

この定義は、局所的であるが、global に well-defined であることがわかる。

3 第一主要定理と Casorati-Weierstrass の定理

簡単のため、f は、ある複素多様体 M から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への正則写像とする。

$$u_H(w) = \log \frac{\|H\|\|w\|}{(H, w)},$$

ただし、$\|H\| = \sqrt{|h_0|^2 + |h_1|^2 + \cdots + |h_n|^2}$, $\|w\| = \sqrt{|w_0|^2 + |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}$, $(H, w) = h_0 w_0 + \cdots + h_n w_n$ である。

今、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ 上の正則マルチンゲール Y に対し、$Y_0 \notin H$ の時、

$$\begin{aligned} m(T, H) &= E[u_H(Y_T)] - E[u_H(Y_0)] \\ N(T, H) &= \lim_{n \to \infty} \lambda P(u_H(Y_T)^* > \lambda), \end{aligned}$$

とおく。ただし、T は、stopping time, $u_H(Y_T)^* = \sup_{0 \le t \le T} u_H(Y_t)$ である。

正則マルチンゲールに関する Ito の公式 ([8]) より、 次の第一主定理の一般化を得る。

命題 3 もし、$Y_0 \notin H$ ならば、

$$m(T,H) + N(T,H) = E[[Y,\overline{Y}]_T].$$

注意 1 i) これは *target* のみの言葉で書いてある。
ii) これは、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ に限らず、より一般な多様体にも成り立つ。例えば、N をコンパクトな複素多様体で、$L \to N$ を 正の $(c_1(L) > 0$ でよい) 正則直線束とし、σ を正則切断とするとき、上の u_H の代わりに、$\log \|\sigma\|^{-1}$ を用いることにより、$\mathbf{C}^n$ から N への正則写像の場合に知られている第一主定理 *(cf.[10])* を 上と同様に一般化することができる。

これより Casorati-Weierstrass 型の定理を得ることができる。次を用意する。

定義 3 $\mathcal{I}$ が、M 上の拡散過程 (X, P_x) の不変加法族とは、任意の $x \in M$ に対し、

$$A \in \mathcal{I} \text{ ならば、任意の } T < \zeta \text{ なる } \textit{stopping time } T \text{ に対して } 1_A = 1_A \circ \theta_T \quad P_x - a.s.$$

が成り立つことをいう。ここで、ζ は X の生存時間である。

(X, P_x) が Brown 運動の時は、不変加法族が自明 (すなわち、測度零集合をのぞき 空集合と全体集合のみからなる) であることと、有界な調和関数は定数に限ることと同値である。

定理 1 f を 複素多様体 M から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への非定数正則写像とする。不変加法族が自明な正則拡散過程 Xで、$f(X)$ が非定数であるものが M 上に存在するならば、f は、測度正の超平面の集合を除外することができない。ここで、測度は、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の標準的なケーラー計量から決まるものとする。

前に述べた注意より次が得られる。

系 1 f を ケーラー多様体 M から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への非定数正則写像とする。M 上の有界な調和関数は定数に限るならば、f は、測度正の超平面の集合を除外することができない。

更に、Yau([14]) のよく知られた結果より次を得る。

系 2 f を ケーラー多様体 M から $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ への非定数正則写像とする。M のリッチ曲率が下に有界ならば、f は、測度正の超平面の集合を除外することができない。

上の定理で「測度正の超平面の集合」というのを「容量正の超平面の集合」に置き換えられるだろうか。Molzon の容量 ([9]) に関しては、容易に置き換えられることがわかる。また、$n = 1$ の時は、前にも述べたように、f による像過程は $\mathbf{P}^1$ 上の Brown 運動を時間変更したものになるので、より直接的に、次を示すことができる。

定理 2 f を 複素多様体 M 上の非定数有理形関数とする。不変加法族が自明な正則拡散過程 Xで、$f(X)$ が非定数であるものが M 上に存在するならば、f は、対数容量正の集合を除外することができない。

今、M, X, f は 定理 1 の仮定を満たすものとする。$\{D_n\}$ を M の exhaustion, すなわち、$D_n \subset\subset D_{n+1} \uparrow M$ を満たす集合列とする。$T_n = \inf\{t > 0 : X_t \notin D_n\}$ とおくと、$T_n \uparrow \zeta$ a.s. である。一般化された characteristic function を

$$\tilde{T}(n) = E[[f(X), \overline{f(X)}]_{T_n}]$$

で定義しよう。

定理 1 の証明 は、既知の Casorati-Weierstrass の定理の証明のときと同じ様に、第一主定理を考慮すれば、次の命題に帰着される。

命題 4 *M, X, f が 定理 1 の仮定を満たすならば、任意の exhaustion に対し、*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}(n) = \infty.$$

次に注意する。

補題 1 *Y をコンパクト複素多様体 N 上の正則マルチンゲールとする。$[Y, \overline{Y}]_\infty < \infty$ a.s. ならば、ほとんど確実に、$\lim_{t\to\infty} Y_t$ が N に存在する。*

証明. コンパクト性と Ito の公式から直ちに従う。(cf.[4],[6])

命題 4 の証明.

$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}(n) < \infty$ とすると、この補題より、$\lim_{t\to\infty} f(X_t)$ が $\mathbf{P}^n$ に存在する。ところが、これは $\mathcal{I}$ 可測であり、仮定により nonrandom でなくてはならない。これを y_∞ とおく。仮定より、$f(x_0) \neq y_\infty$ なる M の一点 x_0 をとることができる。さらに、$\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ の超平面 H_0 で、$f(x_0)$ を含まず、y_∞ を含むものが存在する。すると、

$$u_{H_0}(f(x_0)) < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} u_{H_0}(f(X_{T_n})) = u_{H_0}(y_\infty) = \infty$$

であるが、仮定と、一般化された第一主要定理より

$$\sup_n E_{x_0}[u_{H_0}(f(X_{T_n}))] < \infty$$

となり、矛盾。∎

定理 2 については、つぎの補題に注意すればよい。

補題 2 *D を $\mathbf{P}^1$ の領域とし、$F = \mathbf{P}^1 \setminus D$ とおく。Z_t を Fubini-Study 計量に対応する Brown 運動とする。$w \in D$ とし、$\tau_F = \inf\{t > 0 : Z_t \in F\}$ とおく。もし、 F が対数容量 正ならば、 $E_w[\tau_F] < \infty$.*

4 劣調和関数に対する対数微分の補題

最近、W.Rudin は次を示した。S を $\mathbf{R}^m$ の単位球面、$d\sigma(\zeta)$ をその上の一様確率測度とする。

定理 3 ([12]) u を $\mathbf{R}^m$ 上の劣調和関数で、

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^m : u(x) > -\infty\}$$

は開集合で、$u \in C^1(\Omega)$ であり、

$$\lim_{r\to\infty} \int_S u^+(r\zeta)d\sigma(\zeta) = \infty$$

次を満たすとする。$\gamma > 3/2$ とすると、

$$\int_S \log^+ |\nabla u|(r\zeta)d\sigma(\zeta) \le \gamma \log \int_S u^+(r\zeta)d\sigma(\zeta) + \log\log r$$

が ある長さ有限の集合を除くすべての $r > 0$ について成立する。

いま、f を 整関数とし、$u = \log|f|$ とおけば、古典的な対数微分の補題が従う。しかし、f が有理形であって正則でなければ、u は劣調和ではないので、真の一般化とはいえない。これを我々は、有理形の場合を含むように拡張しよう。

二つの劣調和関数の差になっている関数を δ–subharmonic function という。Riesz の定理により、δ–subharmonic function の Riesz charge は、符号つき測度である。

剰余項が Rudin の結果より悪くなるが、δ–subharmonic function について次が得られる。

定理 4 u を $\mathbf{R}^m$ 上の *δ–subharmonic function* で$\int_S u^+(r\zeta)d\sigma(\zeta) < \infty$ *for all* $r > 0$ をみたすとする。u^+ の *Riesz charge* の負の部分の台は、容量零とする。ここで、容量は、*2* 次元のとき、対数容量、*3* 次元以上のときは ニュートン容量を意味するものとする。任意の $\beta > 0$ に対し、長さ有限の $E_\beta \subset [0,\infty)$ が存在し、

$$\int_S \log^+ |\nabla u|(r\zeta)d\sigma(\zeta) \le (\beta+1)^2 \log\{\int_S u^+(r\zeta)d\sigma(\zeta) + N(u^+, r)\} + \{(3+\epsilon)(\beta+1)^2 + \beta(m-1)\} \log r$$

が、任意の $\epsilon > 0$ と $r \notin E_\beta$ なる すべての $r > 0$ に対して成立する。ここで、

$$N(u^+, r) = \int_{|x|<r} g_r(0, x)d\nu(x)$$

であり、$g_r(0, x)$ は $\{|x| < r\}$ 上の $\frac{1}{2}\Delta$ に関する *Dirichlet* 問題の *Green* 関数、$d\nu(x)$ は、u^+ の *Riesz charge* の負の部分である。

注意 2 i) 上の定理は、$\mathbf{R}^m$ の他にも *Cartan-Hadamard* 多様体や、ある種の *parabolic manifold* についても、補題 *5* を修正する事で示すことができる *([2])*。よって、いずれの場合も剰余項 *(* $\log r$ の項*)* がかわるだけである。例えば、リッチ曲率が下に有界な *Cartan-Hadamard* 多様体 の場合は、この曲率の下限に関係した定数 $\times r$ となる。

ii) f を $\mathbf{C}^n$ 上の有理形関数とし、$u = \log|f|$ とおく。これは定理の条件を満たす。このとき、

$$\int_S u^+(r\zeta)d\sigma(\zeta) + N(u^+, r) = T(r) + O(1)$$

である。**C** 上の有理形関数の場合、左辺は *R.Nevanlinna* の与えた *characteristic function* の元々の定義である。よって、上の定理は、*Vitter* の多変数の場合の対数微分の補題 *([13])* の拡張になっている。
iii) 以下でみるように、補題 *5* 以外は、一般的なマルチンゲールの性質のみによって示される。

この証明のために、幾つかの確率論的命題を用意する。

補題 3 (Burkholder-Davis-Gundy の不等式. [11], p.153) 任意の $p \in (0, \infty)$ に対し、c_p, C_p が存在し、$M_0 = 0$ なる局所マルチンゲール M と任意の *stopping time* Tに対し

$$c_p E[< M >_T^{p/2}] \leq E[(M_T^*)^p] \leq C_p E[< M >_T^{p/2}].$$

補題 4 U を局所劣マルチンゲール、M をそのマルチンゲール部分とする。任意の $\alpha \in (0,1)$ に対し、

$$E[(M_T^*)^\alpha] \leq \{(\frac{2-\alpha}{1-\alpha})^2 + \frac{2-\alpha}{1-\alpha} + 1\}(E[(U_T^+)] + N(U^+, T))^\alpha.$$

ここで、 $U_t^+ = \max\{U_t, 0\}$,

$$N(V,T) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda P(V_T^* > \lambda), \qquad V_T^* = \sup_{0 \leq t \leq T} V_t.$$

補題 5 ([2]) $k(x)$ $\mathbf{R}^m$ 上の非負関数で 任意の $0 < r < \infty$ に対し $E[\int_0^{\tau_r} k(B_s)ds] < \infty$ を満たすとする。ただし、B_t は、$\mathbf{R}^m$ 上の原点から出発する *Brown* 運動である。任意の $\beta > 0$ に対し、長さ有限の $E_\beta \subset [0, \infty)$ が存在し、$r \in E_\beta$ に対して、

$$E[k(B_{\tau_r})] \leq Cr^{\beta(m-1)}(E[\int_0^{\tau_r} k(B_s)ds])^{(1+\beta)^2}$$

が成立する。

これら三つの補題がそろえば、我々の定理を容易に示すことができる。

定理の証明.

先ず次の点に注意する。u を定理の仮定を満たす δ−subharmonic function とする。$U_t = u(B_t)$ とおくと、これは局所劣マルチンゲールになる。M を U のマルチンゲール部分とする。すると、

$$< M >_t = \int_0^t |\nabla u|^2(B_s)ds.$$

また、τ_r を 原点中心、半径 r の球からの B_t の最小脱出時間とすると、

$$E[U_{\tau_r}] = \int_S u(r\zeta)d\sigma(\zeta).$$

$0 < \beta$ に対し、$r \in E_\beta$ をとる。 $0 < \alpha < 1/4$ とする。

$$
\begin{aligned}
& \int_S \log^+ |\nabla u|(r\zeta) d\sigma(\zeta) \\
= \ & E[\log^+ |\nabla u|(B_{\tau_r})] \\
\leq \ & \frac{(\beta+1)^2}{2\alpha} \log^+ E[\int_0^{\tau_r} |\nabla u|^{2\alpha}(B_t)dt] + (m-1)\beta \log r \quad (\text{Jensen の不等式, 補題 5}) \\
\leq \ & \frac{(\beta+1)^2}{2\alpha} \log^+ E[\tau_r^{1-\alpha}(\int_0^{\tau_r} |\nabla u|^2(B_t)dt)^\alpha] + (m-1)\beta \log r \quad (\text{Jensen の不等式}) \\
= \ & \frac{(\beta+1)^2}{2\alpha} \log^+ E[\tau_r^{1-\alpha} < M >_{\tau_r}^\alpha] + (m-1)\beta \log r \\
\leq \ & \frac{(\beta+1)^2}{4\alpha} \log^+ E[\tau_r^{2(1-\alpha)}] + \frac{(\beta+1)^2}{4\alpha} \log^+ E[< M >_{\tau_r}^{2\alpha}] \\
& \quad + (m-1)\beta \log r + O(1) \quad (\text{Schwarz の不等式 }) \\
\leq \ & \frac{(\beta+1)^2}{4\alpha} \log^+ E[(M_{\tau_r}^*)^{4\alpha}] + \{(\beta+1)^2 \frac{1-\alpha}{\alpha} + (m-1)\beta\} \log r + O(1) \quad (\text{補題 3}) \\
\leq \ & (\beta+1)^2 \log\{E[U_{\tau_r}^+] + N(U^+, \tau_r)\} + \{(\beta+1)^2 \frac{1-\alpha}{\alpha} + (m-1)\beta\} \log r + C_\alpha \quad (\text{補題 4}) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] A. Atsuji, "Some inequalities for some increasing additive functionals of planar Brownian motion and an application to Nevanlinna theory " Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo vol 37, 1990, 171-187

[2] A. Atsuji, "Nevanlinna theory via stochastic calculus." Jour. Fanct. Anal. vol.132, No.2 1995, 437-510

[3] A. Atsuji, "A Casorati-Weierstrass theorem for holomorphic maps and invariant $\sigma-$fields of holomorphic diffusions." preprint,1997

[4] A. Atsuji, "A probabilitic proof of the lemma of logarithmic derivative for subharmonic functions." preprint,1997

[5] T. K. Carne, "Brownian motion and Nevanlinna theory." Jour Proc. London Math. Soc. vol 52, 1986, 349-368

[6] R. W. R. Darling, "Convergence of martingales on a Riemannian manifold." Publ.Res.Inst.Math.Kyoto Univ., 19(1983),753-763.

[7] B. Davis, "Picard theorem and Brownian motion." Trans.Amer.Math.Soc., 213(1975),353-362.

[8] M. Emery, ***Stochastic Calculus in Manifolds.*** Springer, 1989.

[9] M. Fukushima, "On holomorphic diffusions and plurisubharmonic functions." in "Geometry of random motion", R. Durrett and M. Pinsky ed. Contemporary Math. 73(1988), 65-78.

[10] H. Kaneko, "多重劣調和関数と複素多様体上の正則拡散過程". 数学 41(1989), 345-357.

[11] R. E. Molzon, "Potential theory on complex projective space: application to characterization of pluripolar sets and growth of analytic varieties." Ill.Jour.Math., 28(1984),103-119.

[12] J. Noguchi and T. Ochiai, Geometric Function Theory in Several Complex Variables. Translations of Mathematical Monographs 80. 1990, AMS

[13] D. Revuz and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion. 2nd ed. 1994, Springer

[14] W. Rudin, "The lemma of the logarithmic derivative for subharmonic functions." Math.Proc.Camb.Phil.Soc. vol.120, 1996, 347-354

[15] A. Vitter, "The lemma of the logarithmic derivative in several complex variables." Duke.Math.J. vol.44, 1977, 89-104

[16] S. T. Yau, "Harmonic functions on complete Riemannian manifolds." Comm.Pure.Appl.Math., 28(1975),201-228.